

Статика вивчає умови, за яких тіло знаходиться в рівновазі під дією заданої системи сил. У статисти всі тіла є абсолютно твердими. **Абсолютно тверде тіло** – це тіло, відстань між будь-якими двома точками якого завжди залишається незмінною. *Рівновагою* є такий стан, при якому тіло перебуває в спокої або рухається прямолінійно рівномірно чи рівномірно обертається. Основні поняття: *система сил* – це сукупність сил, що діють на дане тіло; якщо під дією деякої системи сил вільне тіло не змінює свого механічного стану, то така система сил називається *зрівноваженою системою сил*; дві системи сил називаються *еквівалентними*, якщо вони виявляють однакову механічну дію на одне і те вільне тверде тіло; сила, яка після приєднання до деякої системи сил, що діють на тіло, приводить цю систему до рівноваги називається *зрівноважуючою* даної системи сил; сила, еквівалентна даній системі сил, називається *рівнодійною* цієї системи.

Аксіоми статки:

- 1 Будь-яке тіло зберігає свій стан спокою або прямолінійного рівномірного руху, доки будь-які сили не виведуть тіло з цього стану;
- 2 Сили взаємодії двох тіл завжди однакові за модулем і протилежно напрямлені по одній прямій;
- 3 Для рівноваги вільного твердого тіла, яке перебуває під дією двох сил, необхідно і достатньо, щоб ці сили дорівнювали одна одній за модулем і діяли по одній прямій у протилежних напрямках;
- 4 Рівновага твердого тіла не порушиться, якщо до нього прикласти або відняти від нього систему зрівноважених сил;
- 5 Рівнодійча двох сил, прикладених до тіла в одній точці, дорівнює за модулем діагоналі паралелограма побудованого на даних силах, збігається з діагоналлю і прикладена в тій самій точці.

Тіла поділяють на **вільні** і **невільні**. Під абсолютно *вільним тілом* розуміють тіло, яке може переміщуватися в просторі в будь-якому напрямі. Більшість тіл – невільні, їх рух обмежується взаємодією з іншими тілами. Тіла, які обмежують рух даного тіла в просторі, називаються *в'язями*. Сила, з якою в'язь діє на дане тіло, називається *реакцією в'язі*. Будь-яке невільне тіло можна розглядати як вільне, якщо подумки звільнити його від в'язей і замінити їх дію на тіло силами реакцій цих в'язей (*аксіома про звільнення від в'язей*).

👉 **Зверніть увагу**

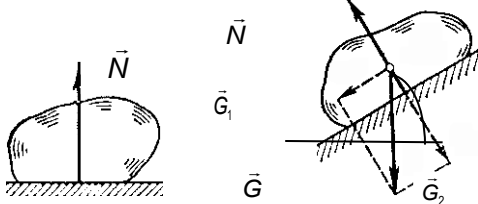
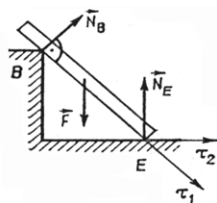
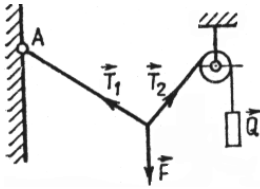
Реакція в'язі є силою протидії і завжди має напрям, протилежний силі дії даного тіла на в'язь. Реакція в'язі завжди напрямлена в бік, протилежний неможливому рухові.

👉 **Запам'ятайте**

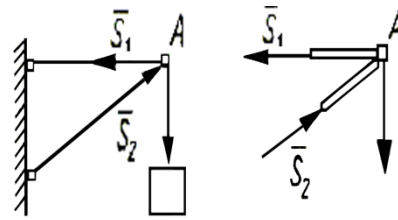
Під час розв'язування задач реакції в'язей у більшості випадків невідомі. Залежно від характеру закріплення тіл розрізняють кілька типів в'язей (табл.1).

Таблиця 1

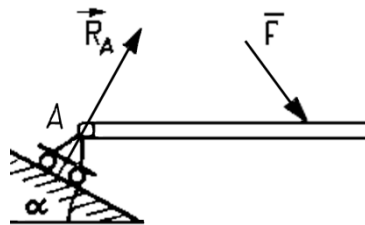
В'язі та їх реакції

Вид в'язі і напрям його реакції	Графічне зображення в'язі та його реакції
1. Ідеально гладка поверхня Реакція N напрямлена вздовж нормалі до поверхні в бік тіла	
2. Опорна точка чи ребро Реакція N напрямлена перпендикулярно до поверхні тіла чи дотичної до опорної поверхні в бік тіла	
3. Гнучка в'язь (нитка, ланцюг, канат). Гнучка в'язь може бути тільки розтягнутою, тому реакція T напрямлена вздовж в'язі до точки підвісу	

4. Ідеальний стержень, кінці якого кріпляться шарнірно, навантажений на кінцях. Реакція S напрямлена по прямій, яка проходить через центри шарнірів і прикладена до шарніра об'єкта, рівновага якого вивчається. Ідеальний стержень працює на розтяг або стиск

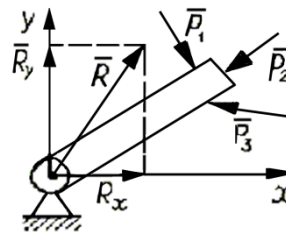


5. Рухомий циліндричний шарнір. В'язь дозволяє тілу обертатися навколо осі шарніра і рухатися разом із шарніром уздовж опорної поверхні. Реакція R напрямлена перпендикулярно до опорної поверхні

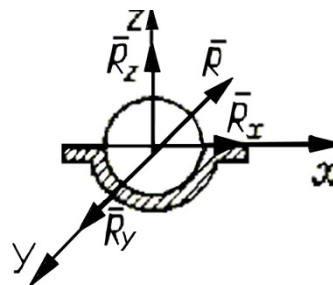


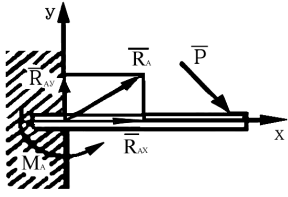
6. Нерухомий циліндричний шарнір (радіальний підшипник, петля). Реакція лежить у площині, перпендикулярній до осі шарніра, напрям її невідомий. Під час розв'язку задач реакцію показують складовими R_x і R_y ,

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$



7. Сферичний шарнір, упорний підшипник, підп'ятник
 Напрямок реакції в просторі може бути довільним залежно від активних сил. Під час розв'язку задач її зображають



у вигляді трьох складових: R_x , R_y , R_z ; $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$	
8. Жорстке закріплення у випадку дії на тіло плоскої системи сил. Реактивні сили можна зобразити у вигляді опорної реакції $R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2}$ та реактивного моменту M_A	

❖ Питання для самоконтролю

1. Чи порушиться рівновага тіла (рис. 2), якщо чисельно рівні сили F_1 і F_2 поміняти місцями?

2. При яких значеннях кута α (в межах $0-180^\circ$) (рис. 3) модуль рівнодійної визначається як: а) $R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$; б) $R = F_1 + F_2$; в) $R = F_1 - F_2$?

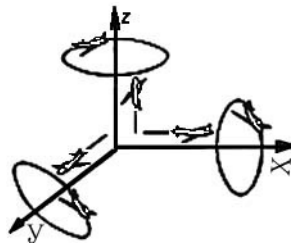


Рис. 1



Рис. 2

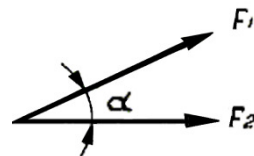
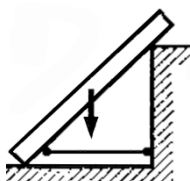


Рис. 3

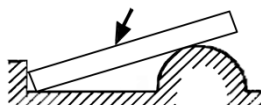
3. Чи можуть зрівноважуватись сили дії та протидії двох тіл? Чому?

4. До якого тіла прикладена реакція опори: до самої опори чи до тіла, яке на неї опирається?

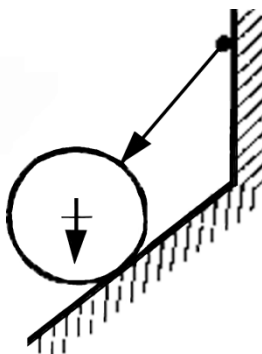
5. Вказати напрями реакцій в'язей балок і кулі (рис. 4).



а



б.



в

Рис 4

1.2. Плоска система сил

Система збіжних сил. Розкладання сили на дві складові, прикладені в тій же точці. Додавання плоскої системи збіжних сил, силовий багатокутник. Проекція сили на осі координат. Геометричний та аналітичний способи визначення рівнодійної системи збіжних сил. Геометрична та аналітичні умови рівноваги плоскої системи збіжних сил. Раціональний вибір координатних осей.

Додавання двох паралельних сил. Момент сили відносно точки. Пара сил. Плече пари, момент пари. Властивості пар. Еквівалентність пар. Додавання пар. Умова рівноваги плоскої системи пар.

Теорема про паралельне перенесення сили. Зведення довільної плоскої системи сил до даного центра. Головний вектор та головний момент плоскої системи сил. Окремі випадки зведення плоскої системи сил до даного центра. Умови рівноваги плоскої довільної системи сил, рівняння рівноваги. Рівновага плоскої системи паралельних сил. Раціональний вибір напрямку координатних осей і центра моментів. Класифікація навантажень: зосереджені сили, зосереджені пари сил, розподілені навантаження. Визначення опорних реакцій балок. В'язі з тертям. Тертя ковзання, тертя кочення.

Інформація

Система сил, лінії дії яких перетинаються в одній точці, називається **системою збіжних сил**. Плоска система збіжних сил у загальному випадку еквівалентна одній силі – рівнодійній. Рівнодійна плоскої системи збіжних сил $\vec{R}$ дорівнює геометричній сумі всіх сил системи $\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$ (рис. 5а), чисельно рівнодійна дорівнює (рис. 5б):

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n F_{ix}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n F_{iy}\right)^2}.$$

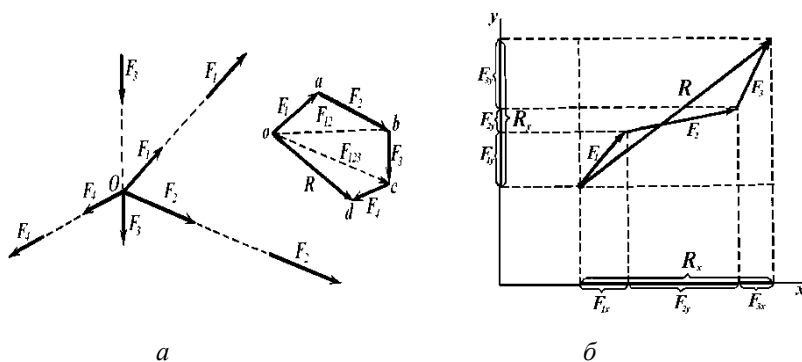


Рис. 5

Дві паралельні, рівні за модулем і протилежно напрямлені сили називаються **парою сил** (рис. 6). Пара сил намагається надати тілу обертального руху. Обертальна дія пари залежить від величини сили, плеча пари, напрямку обертання, площини дії пари і характеризується моментом пари. **Плече пари** – це відстань між лініями дії сил. **Момент пари** дорівнює добутку модуля однієї з сил пари на плече пари:

$$m(F_1; F_2) = \pm F_1 h = \pm F_2 h.$$

Момент пари є додатним, якщо вона намагається обертати тіло в напрямі, протилежному руху годинникової стрілки. Одна сила також може спричинити обертальну дію, яка характеризується моментом сили. **Момент сили** відносно точки дорівнює добутку модуля сили на її плече:

$$M_o(F) = \pm Fh.$$

Точку, відносно якої визначають момент сили, називають центром моменту. Плечем сили відносно точки називають найкоротшу відстань від центра моменту до лінії дії сили (рис. 7). Момент сили є додатним, якщо сила намагається обертати своє плече навколо центра моментів проти годинникової стрілки (рис. 8).

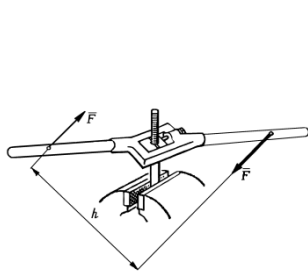


Рис. 6

Рис. 8

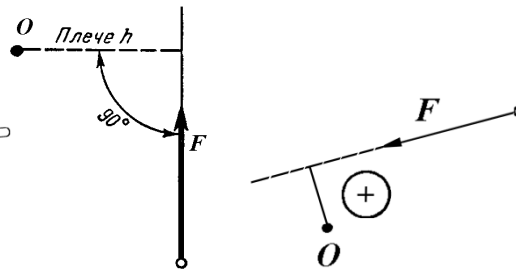


Рис. 7

Зверніть увагу

Проекція сили на вісь дорівнює модулю цієї сили, помноженому на косинус кута між напрямом сили і додатним напрямом осі: $F_x = F \cos \alpha$ (рис. 9). Під час вивчення теми необхідно отримати навички в розв'язуванні задач на рівновагу тіл, звернувши особливу увагу на раціональний вибір напрямку координатних осей. При розв'язуванні задач для спрощення рівнянь рівноваги координатні осі вибирають таким чином, щоб хоча б одна з осей співпадала з невідомою реакцією.

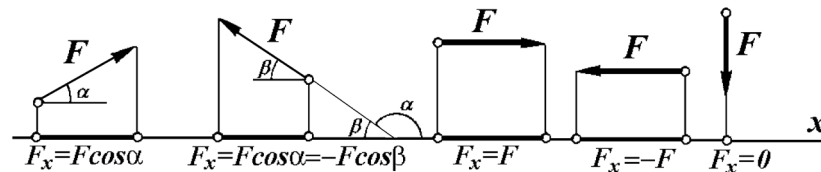


Рис. 9

Пару сил не можна зрівноважити однією силою, її можна зрівноважити тільки іншою парою. Дія пари сил на тіло не зміниться, якщо пару перемістити в площині її дії; змінити модуль сил і плече пари, не змінивши її моменту. Момент сили відносно точки залежить від взаємного розміщення сили і точки (центра моменту). Одна й та сама сила відносно різних точок може створювати додатний і від'ємний моменти (рис.10). Момент сили відносно точки не змінюється від перенесення її

вздовж лінії дії, оскільки модуль сили і плече залишаються незмінними (рис.11). Момент сили відносно точки, що лежить на лінії дії цієї сили, дорівнює нулю.

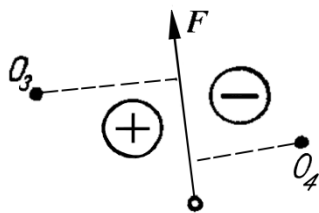


Рис. 10

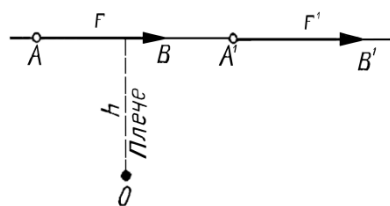


Рис. 11

При складанні рівнянь рівноваги слід звернути особливу увагу на раціональний вибір напрямку координатних осей та положення центру моментів: координатну вісь доцільно проводити перпендикулярно одній з невідомих сил, а за центри моментів вибирати точки, в яких перетинається більше невідомих сил. Види навантажень балок: зосереджені сили (рис. 12), рівномірно розподілені навантаження (рис.13) і пари сил. Розглянути питання тертя, ковзання і кочення, поняття самогальмування, які мають важливе значення в техніці.

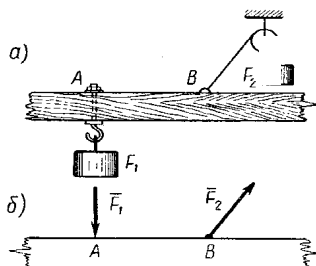


Рис.12

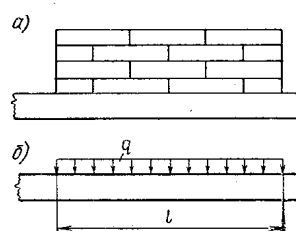


Рис. 13

← Запам'ятайте

Рівновага тіла буде забезпечена у випадку, коли рівнодійна рівна нулю. Геометричною умовою рівноваги плоскої системи збіжних сил є замкнутість силового багатокутника, побудованого на силах системи. Аналітичною умовою рівноваги плоскої системи збіжних сил є рівність нулю алгебраїчної суми проекцій всіх сил системи на дві довільні взаємно перпендикулярні осі (табл. 2):

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0.$$

При будь-якому центрі моментів пара сил входить до рівняння моментів з одним і тим же знаком і однією й тією ж величиною. У рівняння сил і в рівняння проекцій сил пара сил не входить. Плоску систему пар можна замінити однією парою, момент якої дорівнює алгебраїчній сумі моментів складових пар:

$$m = \sum_{i=1}^n m_i.$$

Для рівноваги плоскої системи пар необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума моментів усіх пар системи дорівнювала нулю:

$$m = \sum_{i=1}^n m_i = 0.$$

Аналітичною умовою рівноваги плоскої системи довільних сил є рівність нулю алгебраїчних сум проекцій сил системи на дві довільні взаємно перпендикулярні осі, які лежать у площині дії сил, та алгебраїчної суми моментів сил системи відносно будь-якої точки площини:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, \sum_{i=1}^n M_O(F_i) = 0 \text{ (табл. 2).}$$

Ці рівняння називають рівняннями рівноваги плоскої системи довільних сил. У деяких випадках рівняння рівноваги зручно застосовувати в такому вигляді:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \sum_{i=1}^n M_A(F_i) = 0, \sum_{i=1}^n M_B(F_i) = 0$$

(вісь X не перпендикулярна відрізку AB);

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \sum_{i=1}^n M_B(F_i) = 0, \sum_{i=1}^n M_C(F_i) = 0$$

(точки A, B і C не лежать на одній прямій).

❖ Питання для самоконтролю

1. Чи є збіжною система сил, що діє на кулю (рис. 4в); на шарнір В (рис. 14)?
2. Який вектор силового багатокутника (рис. 15а) є рівнодійною силою?
3. Визначити значення рівнодійної сили (рис. 15б).
4. Який силовий багатокутник (рис. 15а чи 15б) відповідає зрівноваженій системі сил ?

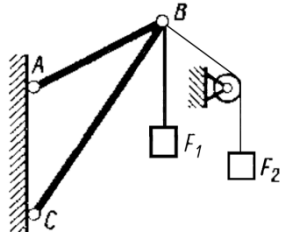


Рис. 14

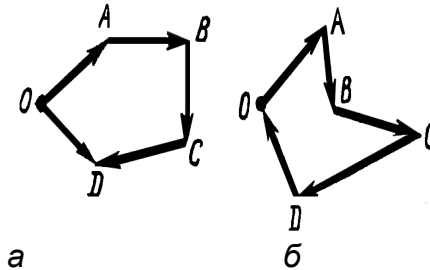


Рис. 15

5. При яких значеннях кута α (у межах $0-180^\circ$) проекція сили на вісь (рис. 16) буде рівна: а) нулю; б) F ; в) $-F$?

6. Точка А знаходиться в рівновазі під дією чотирьох сил, з яких сили R_1 та R_2 – невідомі. При якому розміщенні координатних осей (рис. 17а чи 17б) одержані рівняння рівноваги будуть простішими?

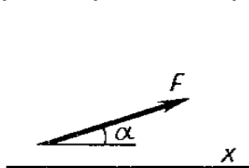


Рис. 16

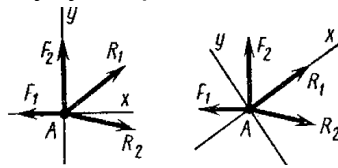


Рис. 17

7. Чи є серед зображених на рис. 18 пар сил еквівалентні пари?
8. Момент якої з наведених пар (рис. 18) є додатним?
9. Визначити момент пари сил, зображеної на рис. 18в.
10. Чому сили пари не включають у рівняння проекцій сил на координатні осі?
11. Чому пара сил входить до рівняння моментів з одним і тим же знаком і однією й тією ж величиною?
12. Визначити суму моментів сил (рис.19) відносно точки О, якщо

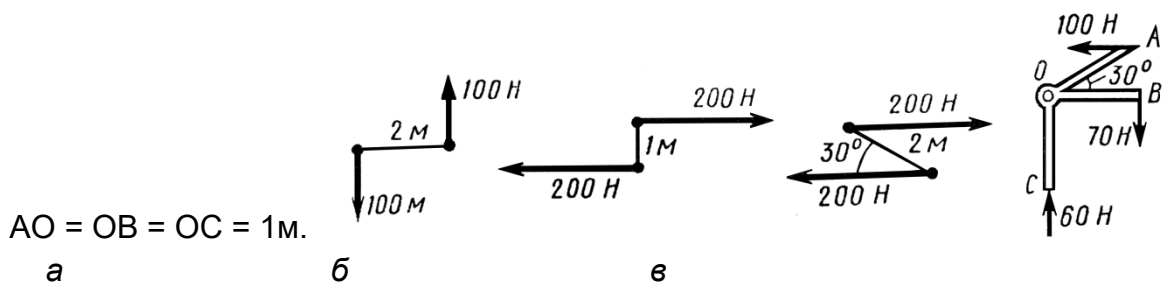


Рис. 18

Рис.19

13. Чи залежать значення і напрям головного вектора від положення центру зведення?

14. Головний вектор і головний момент плоскої системи довільно розміщених сил дорівнюють нулю. Чи можна стверджувати, що дана система сил знаходиться в рівновазі?

15. Скільки незалежних рівнянь рівноваги можна скласти для плоскої системи паралельних сил?

16. Чи будуть однаковими значення складових реакцій шарніра А та його повної реакції (рис. 20) при різному напрямі координатних осей?

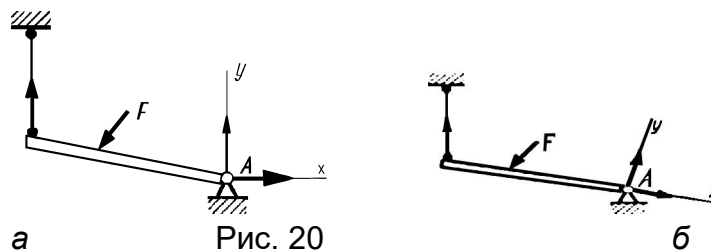


Рис. 20

1.3. Просторова система сил

Паралелепіпед сил. Проекція сили на три взаємно перпендикулярні осі. Рівновага просторової системи збіжних сил. Момент сили відносно осі. Загальний випадок дії просторової системи сил на тіло. Рівновага довільної просторової системи сил. Рівновага просторової системи паралельних сил.

Інформація

Системи сил, лінії дії яких не лежать в одній площині, називають **просторовими системами сил**. Просторові системи сил поділяються на системи збіжних та довільно розміщених сил. Аналітичний метод розв'язку задач з просторовими системами сил аналогічний розв'язку для плоских систем з тією лише різницею, що сили проектується на три, а не на дві взаємно перпендикулярні осі, моменти сил визначаються відносно цих осей, а не відносно точок. Для рівноваги просторової системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми проекцій усіх сил системи на кожну з трьох взаємно перпендикулярних осей дорівнювали нулю:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0.$$

Зверніть увагу

Для визначення моменту сили $\vec{F}$ відносно осі z необхідно:

- провести площину, перпендикулярну до цієї осі;
- знайти проекцію $\vec{F}_{xy}$ сили $\vec{F}$ на цю площину (на відміну від проекції сили на вісь, проекція сили на площину є величиною векторна);
- обчислити момент проекції $\vec{F}_{xy}$ відносно точки перетину осі z з площиною (рис. 21): $M_z = \pm F_{xy} h$.

Момент сили відносно осі вважають додатним, якщо спостерігач, розташований на вістрі осі, бачить обертання тіла навколо осі проти руху стрілки годинника. Необхідно пам'ятати, що момент сили відносно осі дорівнює нулю, якщо сила і вісь лежать в одній площині, тобто лінія дії сили перетинає вісь (плече дорівнює нулю, рис. 22а), лінія дії сили паралельна осі (проекція сили дорівнює нулю, рис. 22б, 22в).

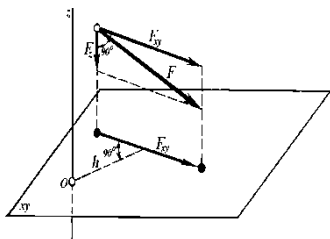


Рис. 21

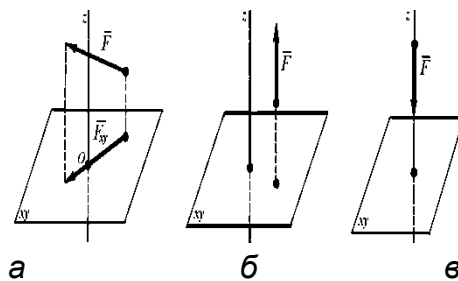
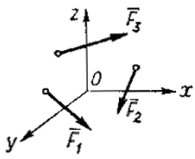
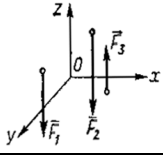
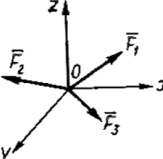
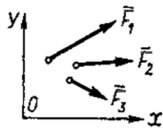
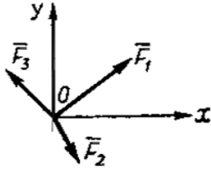


Рис. 22

Рівняння рівноваги сил

Просторова система	
довільних сил 	$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0$ $\sum_{i=1}^n F_{iz} = 0 \quad \sum_{i=1}^n M_x(F_i) = 0$ $\sum_{i=1}^n M_y(F_i) = 0 \quad \sum_{i=1}^n M_z(F_i) = 0$
паралельних сил 	$\sum_{i=1}^n F_{iz} = 0 \quad \sum_{i=1}^n M_x(F_i) = 0$ $\sum_{i=1}^n M_y(F_i) = 0$
збіжних сил 	$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0$ $\sum_{i=1}^n F_{iz} = 0$
Плоска система	
довільних сил 	$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0$ $\sum_{i=1}^n M_o(F_i) = 0$
паралельних сил 	$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0$ $\sum_{i=1}^n M_o(F_i) = 0$
збіжних сил 	$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0$ $\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0$

→ **Запам'ятайте**

Для рівноваги просторової системи довільно розміщених сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми проєкцій всіх сил на кожну з трьох осей координат були рівні нулю та алгебраїчні суми моментів усіх сил відносно кожної з цих осей були рівні нулю (тіло не рухається вздовж жодної з координатних осей (рис. 1) і не обертається відносно цих осей). Ці умови записуються *шістьма рівняннями рівноваги* (табл. 2):

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_x(F_i) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n M_y(F_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_z(F_i) = 0.$$

Будь-яку з систем можна розглядати як окремий випадок довільної просторової системи сил. Тому наведені шість рівнянь використовують для розв'язку задач на рівновагу різних систем сил, при цьому деякі з цих рівнянь перетворюються на тотожність. Рівняння рівноваги для різних систем сил наведено в табл. 2.

◆ Питання для самоконтролю

1. Скільки рівнянь рівноваги і які можна скласти для просторової системи збіжних сил?
2. Як визначити момент сили відносно осі?
3. Чому при визначенні моменту сили відносно осі необхідно проектувати силу на площину, перпендикулярну осі?
4. В яких випадках момент сили відносно осі дорівнює нулю?
5. Скільки рівнянь рівноваги і які можна скласти для просторової системи довільних сил; паралельних сил?

1.4. Центр ваги

Центр паралельних сил. Центр ваги твердого тіла. Методи знаходження координат центра ваги. Положення центрів ваги простих геометричних фігур. Статична стійкість положення рівноваги твердого тіла.

📖 Інформація

Центром ваги твердого тіла називають незмінно зв'язану з тілом точку, через яку проходить лінія дії сили тяжіння даного тіла при будь-якому положенні тіла в просторі. Центр ваги може знаходитись як на самому тілі, так і за його межами. Для визначення положення центра ваги використовують експериментальний та аналітичні методи: *симетрії, розбиття, від'ємних мас*. Центри ваги тіл визначають при розв'язку задач на рівновагу і стійкість тіл. Головну увагу при вивченні цієї теми слід звернути на розв'язок задач з плоскими геометричними фігурами та зі стандартними прокатними профілями.

👉 Зверніть увагу

У реальних умовах кожне тіло під дією навколишнього середовища може отримати деякі відхилення від положення рівноваги. Опір тіла цим відхиленням називають **стійкістю**. Для стійкості твердого тіла проти перекидання необхідно і достатньо, щоб момент стійкості був більшим, ніж момент перекидання: $M_{ст} \geq M_{п}$.

◆ Питання для самоконтролю

1. У чому полягає основна властивість центра паралельних сил?
2. Дати визначення центра ваги тіла.
3. Чи може бути статичний момент площі від'ємним або рівним нулю?
4. Як визначити положення центра ваги тіла за допомогою методу розбиття?
5. Як знайти координати центра ваги плоского складного перерізу?
6. Де знаходиться центр ваги однорідного тіла обертання?
7. Яка умова необхідна для забезпечення стійкості тіла?
8. Навести приклади стійкої, нестійкої і байдужої рівноваги.
9. Як зміниться стійкість тіла, якщо збільшити площу його опори; знизити положення центра ваги?